**Problème 323 – Scrat et le gland glissant - Corrigé**

1) On a .

Ce qui donne .

Or donc pour n≥1,

Soit .

Ou encore, pour n≥0, .

2) On appelle (Pn) la propriété au rang n : = 3 x

Initialisation :

Pour n=0, 3 x = 3 x  = 3.

Pour n=1, 3 x = 3 x ( = 4,5.

Or .

Et en appliquant la relation : = = 4,5.

(Pn) est donc bien vérifiée pour n = 0 et n = 1.

Hérédité :

On suppose que (Pn) est vérifiée au rang n et n+1. Démontrons (Pn) est vérifiée au rang n+2.

On a pour n≥0.

Par hypothèse de récurrence, on a alors :

.

Donc - (- )

+ .

+ .

+ .

+ .

+ .

+ .

.

(Pn) est donc vérifiée au rang n+2.

Conclusion : pour tout n≥0, = 3 x

3) .

Soit = 0.

Ou 2 = 0.

On pose l’équation caractéristique : 2r2 – 3r + 1 = 0.

Une solution évidente est r1= 1.

Donc on a par produit des racines : r1 x r2 = donc r2 = .

On a donc : = a x 1n + b x

On plus simplement = a + b x

Or = 3 donc a + b x a + b = 3.

Et = 4,5 donc a + b x a + b = 4,5.

Par résolution du système, on trouve facilement : b = -3 et a = 6.

Donc = 6 - 3 x (1)

Reprenons l’expression = 3 x .

est la somme d’une suite géométrique de premier terme 1 et de raison .

Donc = 2 ().

Donc = 3 x = 6().

Soit = 6 .

= 6 – 6 .

= 6 , ce qui nous ramène bien à l’expression (1).

4)

Le gland s’est stabilisé autour de 6 mètres par rapport à la position initiale de Scrat.

5) On reprend la même approche.

On a avec les mêmes conditions initiales.

De la même manière que précédemment, on démontre que = 3 x (par récurrence double, par exemple).

Or  =  = .

 = .

Donc = 3 x .

Or 3 x = 3 x

C’est donc bien à 3 x mètres du point de départ de Scrat que le gland se serait stabilisé après un très grand nombre de sauts de l’écureuil.